



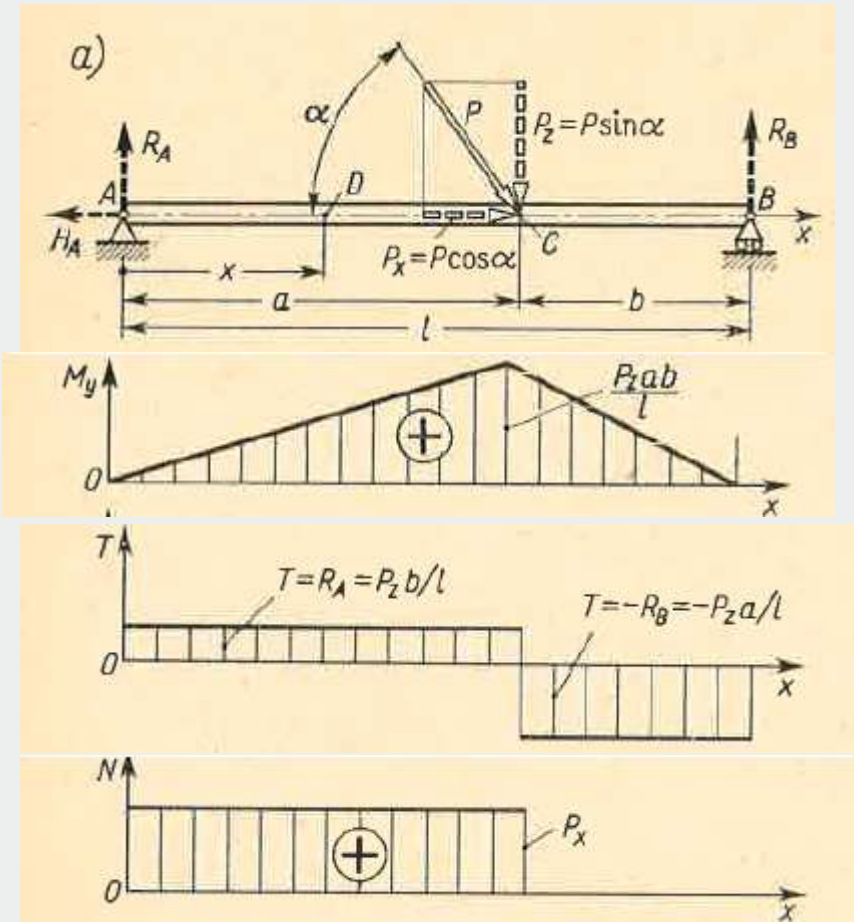
Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa  
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



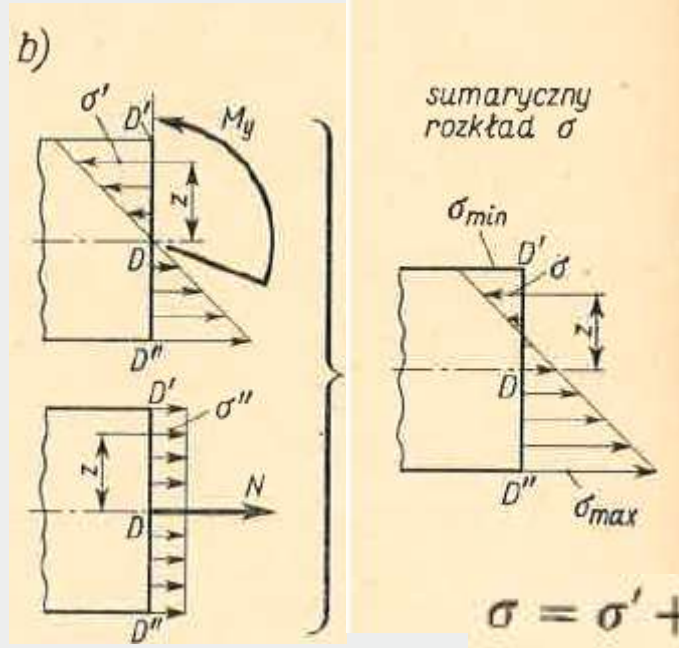
## Wykład 13

# Wytrzymałość prętów krępych

# Zginanie prętów krępych przy istnieniu sił wzdłużnych



Analiza jednoczesnego zginania i rozciągania



sumaryczny rozkład  $\sigma$

$$\sigma' = -M_y z / J_y$$

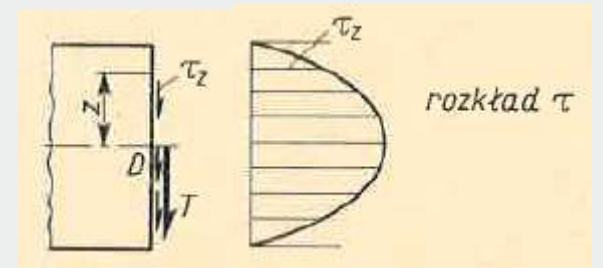
$$\sigma'' = N / A$$

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = (N/A) - (M_y z / J_y)$$

$$\sigma_{\min} = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{W_y'}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y''}$$

$$\tau_z = T S_y^{(z)} / J_y b_z$$



rozkład  $\tau$

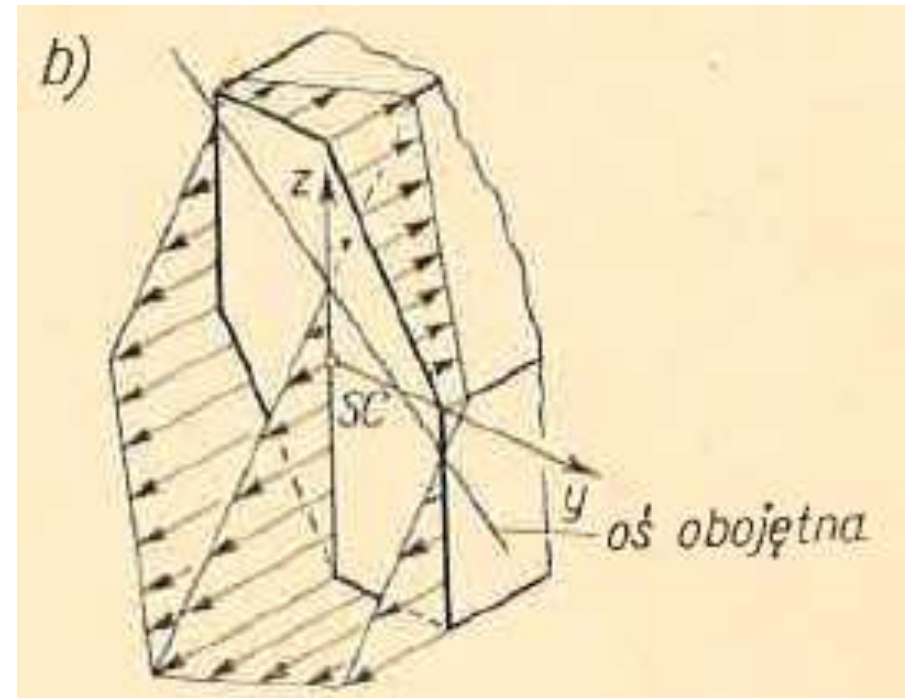
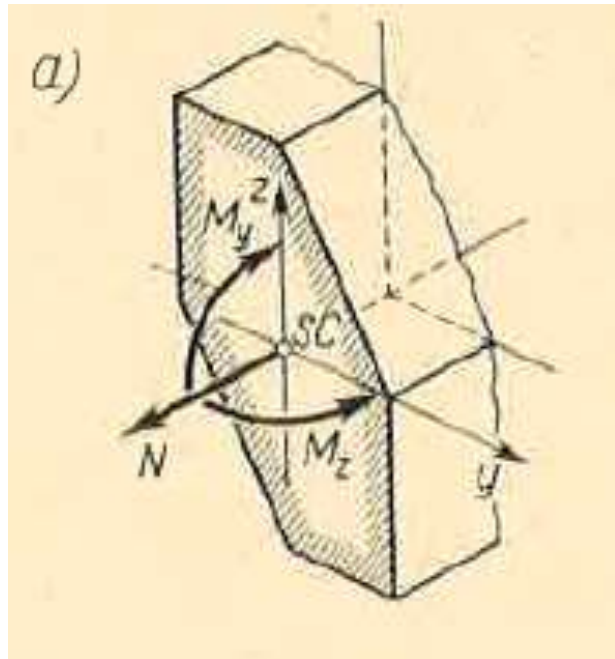
## Zginanie prętów krępych przy istnieniu sił wzdłużnych

W przypadku ukośnego zginania i jednoczesnego rozciągania lub ściskania

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_y z}{J_y} - \frac{M_z y}{J_z}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{\mathfrak{M}_y z}{J_y} - \frac{\mathfrak{M}_z y}{J_z}$$

Jednoczesne zginanie ukośne i rozciąganie

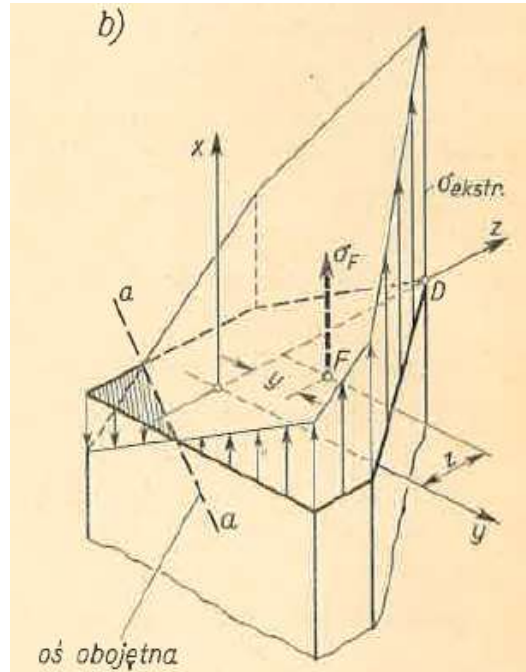
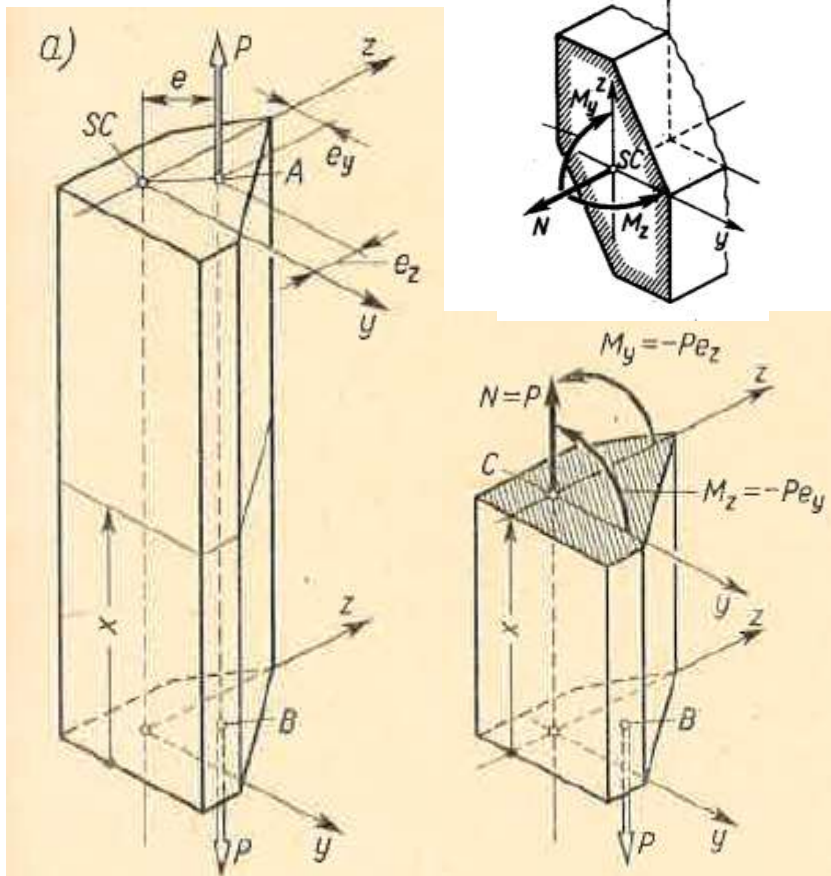




## Mimośrodowe rozciąganie lub ściskanie prętów

Szczególnym przypadkiem zginania i jednoczesnego rozciągania lub ściskania jest *mimośrodowe rozciąganie lub ściskanie*.

Odległość  $e$  między linią działania siły a osią nazywamy *mimośrodem siły*.



$$N = P, \quad M_y = -Pe_z, \quad M_z = -Pe_y,$$

$$\sigma_F = \frac{P}{A} + \frac{Pe_z z}{J_y} + \frac{Pe_y y}{J_z}$$

Aby wyznaczyć ekstremalne naprężenie  $\sigma_e$ , celowe jest znaleźć naprzód oś obojętną  $a-a$ , dla której  $\sigma_F = 0$ ,

$$\left(\frac{1}{A}\right) + \left(\frac{ze_z}{J_y}\right) + \left(\frac{ye_y}{J_z}\right) = 0$$

promieni e. bezwładności  $i_y, i_z$

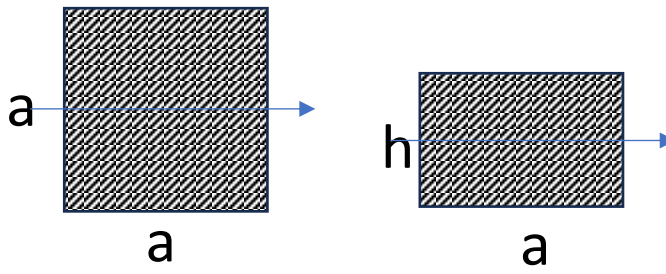
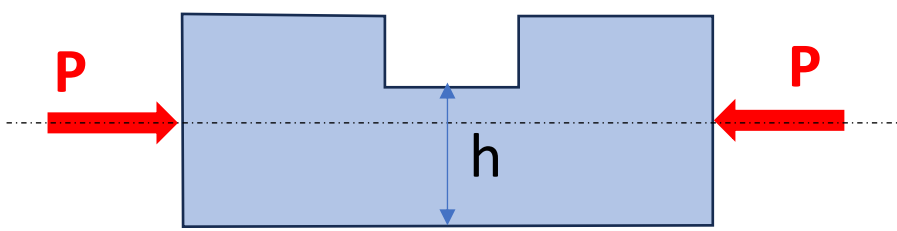
$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}, \quad i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}}$$

$$\frac{e_z z}{i_y^2} + \frac{e_y y}{i_z^2} + 1 = 0$$

## Analiza mimośrodowego rozciągania

Z zależności tej widać, że przy dostatecznie małych mimośrodkach  $e_y$  i  $e_z$  oś obojętna jest przesunięta poza obręb materialnego przekroju pręta. To oznacza, że na całym przekroju działają jednoimienne naprężenia. Przypadek taki ma duże znaczenie w konstrukcjach inżynierskich, w których stosowane są materiały, jak cegła lub beton, mające małą wytrzymałość na rozciąganie i wielokrotnie większą wytrzymałość na ściskanie. W konstrukcjach takich pożądane jest, aby przy mimośrodkowym ścisnieniu pręta naprężenia na całym polu przekroju były ściskające. Spełnienie tego warunku jest możliwe, gdy mimośród siły nie wykracza poza pewne granice. W konstrukcjach maszynowych zagadnienie to nie ma dużego znaczenia.

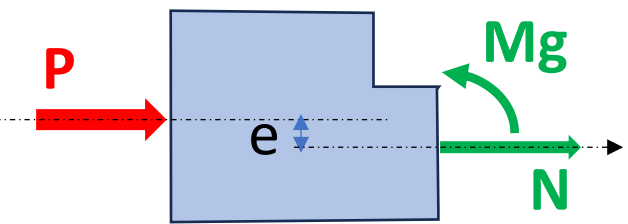
Zad. 13.1 - Mimośrodowe ściskanie prętów krępych



$$A = ah$$

$$J_y = \frac{a \cdot h^3}{12}$$

$$W_y = \frac{ah^2}{6}$$



$$e = \frac{a-h}{2}$$

$$N + P = 0$$

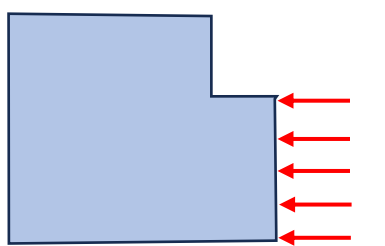
$$N = -P$$

$$\sigma^{extr} = \frac{N}{A} \mp \frac{M}{W_y}$$

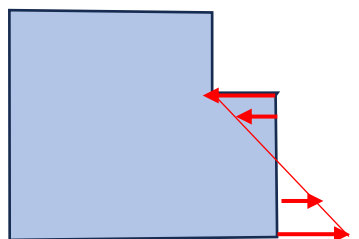
$$M_g - P \cdot e = 0$$

$$M_g = P \cdot e$$

$$\sigma = \frac{-P}{ah} \mp \frac{P \cdot e}{\frac{ah^2}{6}} = -\frac{P}{ah} \mp \frac{3P(a-h)}{ah^2}$$



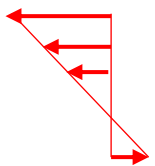
$$-P/(ah)$$



$$\frac{3P(a-h)}{ah^2}$$

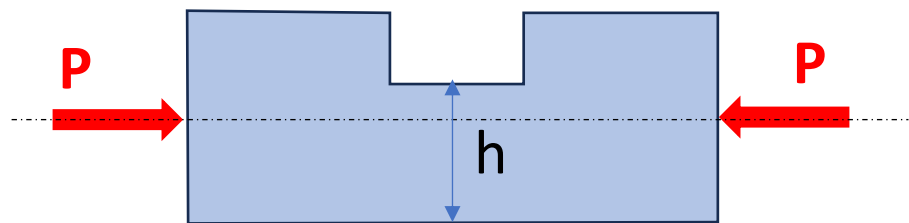
=

$$\frac{-3P(a-h)}{ah^2} - P/(ah)$$

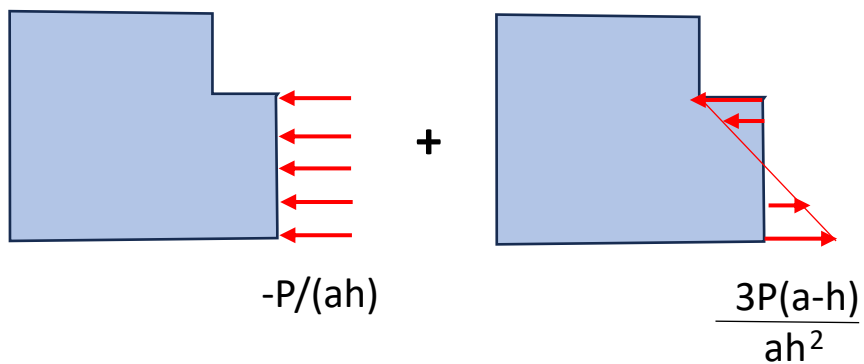


$$\frac{3P(a-h)}{ah^2} - P/(ah)$$

$h \downarrow$  - niebezpieczeństwo rozciągania!

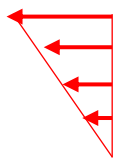


Jaka jest granica pocieniania  $h_{\min} = ?$



$$\frac{-3P(a-h)}{ah^2} - P/(ah)$$

wtedy  $\bar{\sigma} = 0$



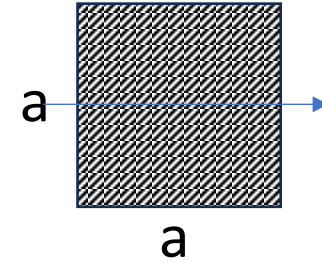
$$\frac{3P(a-h)}{ah^2} - P/(ah) = 0$$

$$-\frac{P}{ah} + \frac{3P(a-h)}{ah^2} = 0$$

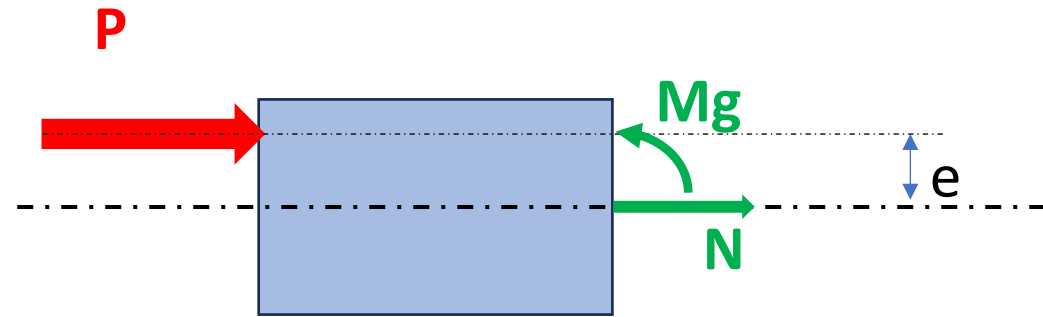
$$h = 3(a-h)$$

$$h_{\min} = \frac{3}{4}a$$

Zad. 13.2 - Mimośrodowe ściskanie prętów krępych



$$J_y = \frac{a^4}{12}$$



$$N = -P$$

$$M_g = P \cdot e$$

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = -\frac{P}{a^2}$$

$$\sigma_{M_g} = -\frac{M_g}{J_y} \cdot z$$

$$\sigma_{M_g}^{\text{extr}} = -\frac{P \cdot e}{\frac{1}{12} a^4} \cdot z \quad \begin{matrix} + \\ - \\ \frac{a}{2} \end{matrix}$$



$$\sigma_N + \sigma_{Mg} = \sigma$$

$$\sigma_{Mg}^{ext} = \pm \frac{6Pe}{a^3}$$

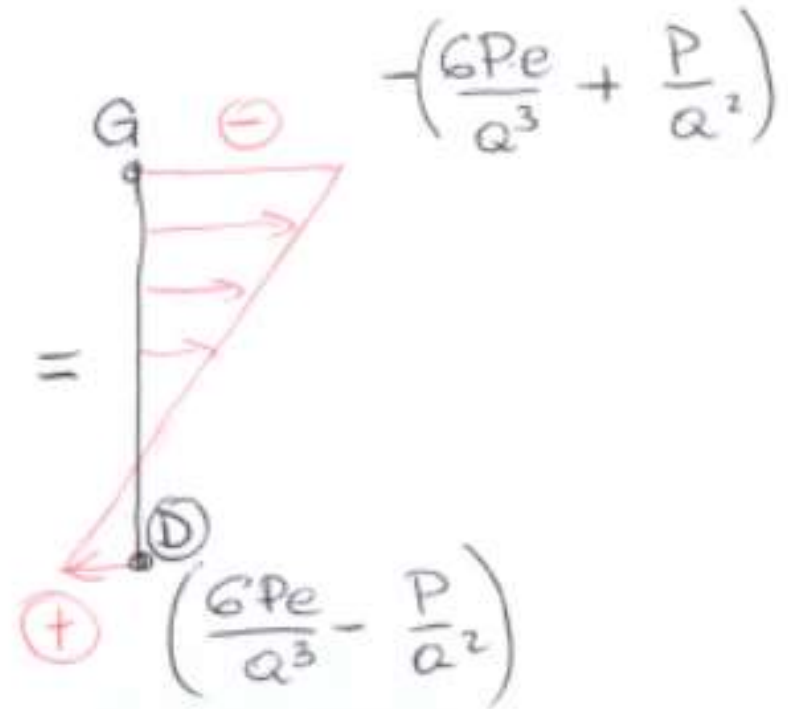
$\sigma_N$



$\sigma_{Mg}$



+



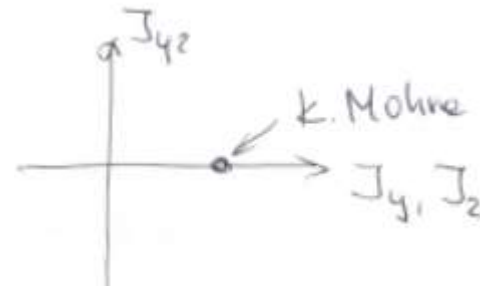
Znaleźć  $e_{max}$ , dla którego naprężenia w punkcie dolnym ① osiągną 0

$$\frac{6P \cdot e}{a^3} - \frac{P}{a^2} = 0 \Rightarrow \frac{P(6 \cdot e - a)}{a^3} = 0$$

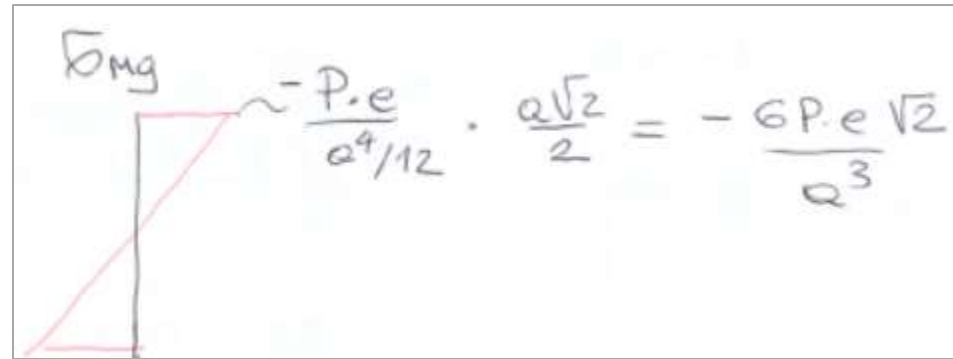
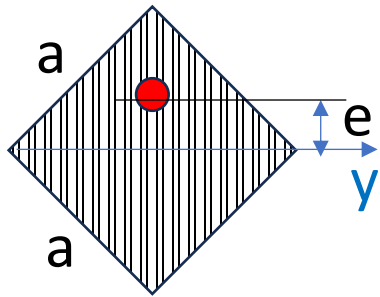
$$e_{max} = \frac{a}{6} = 0,167a$$



Zad. 13.3 - Mimośrodowe ściskanie prętów krępych (inne przekroje)

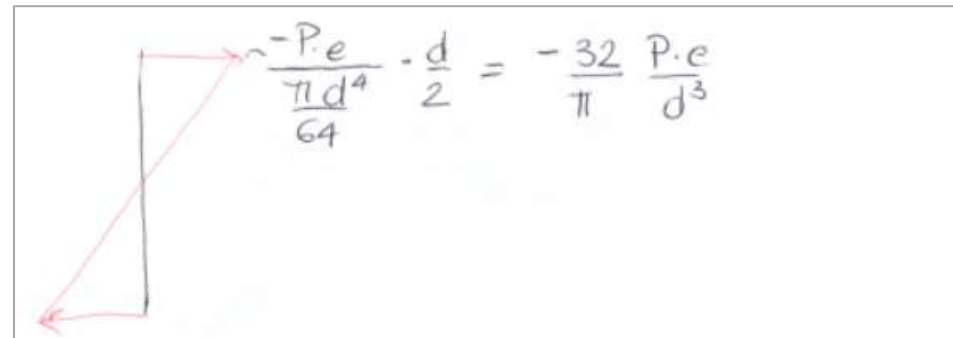
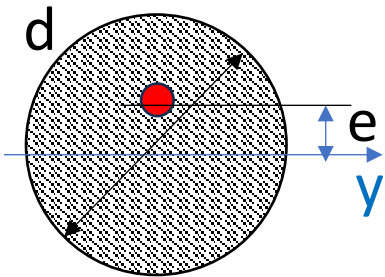


$$J_y = \frac{1}{12} a^4$$



$$\frac{6P \cdot e \sqrt{2}}{a^3} - \frac{P}{e^2} = 0$$

$$e_{\max} = \frac{a}{6\sqrt{2}} = 0.118a$$

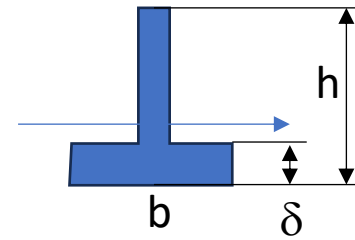
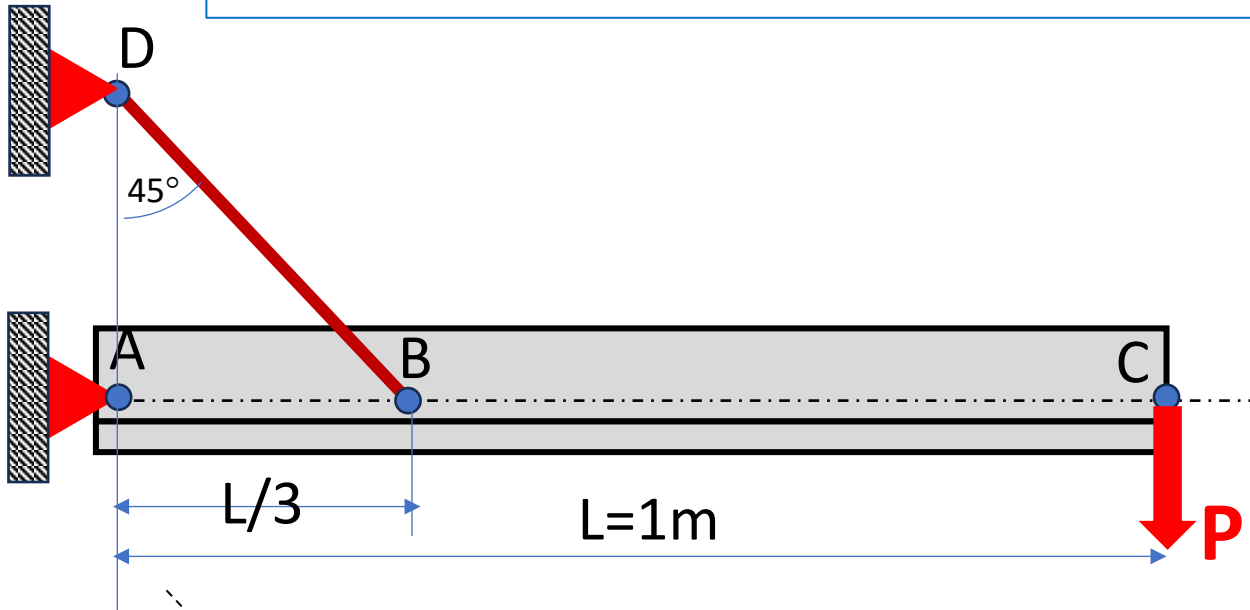


$$\frac{32}{\pi} \cdot \frac{P \cdot e}{d^3} - \frac{4P}{\pi d^2} = 0$$

$$\frac{P}{\pi d^3} (32 \cdot e - 4d) = 0$$

$$e_{\max} = \frac{d}{8} = 0.125d$$

# Zadanie 13.4

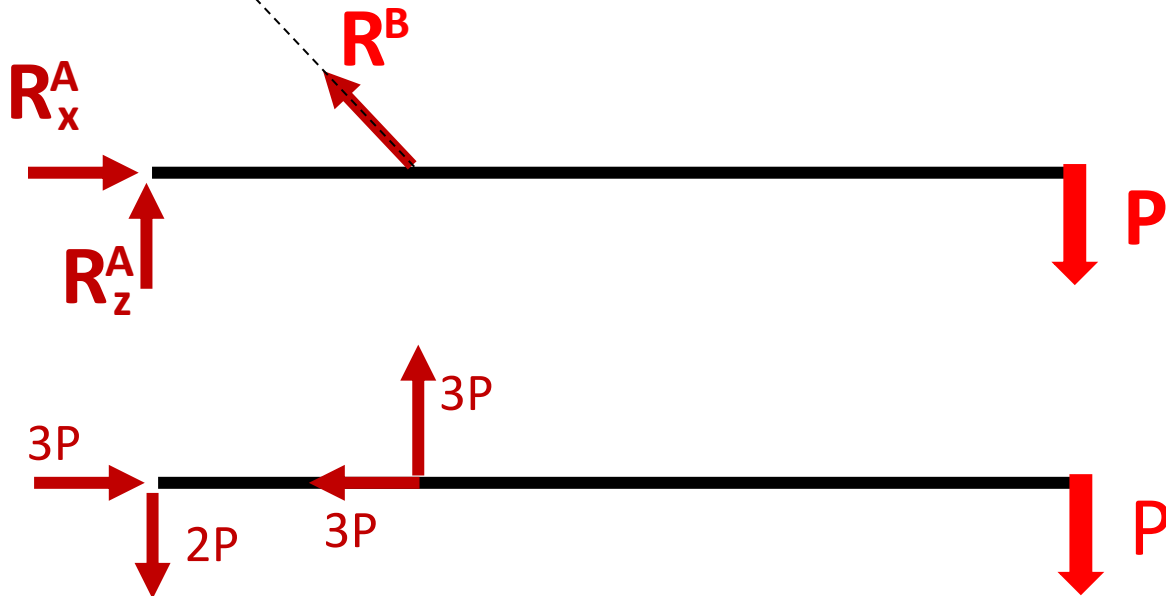


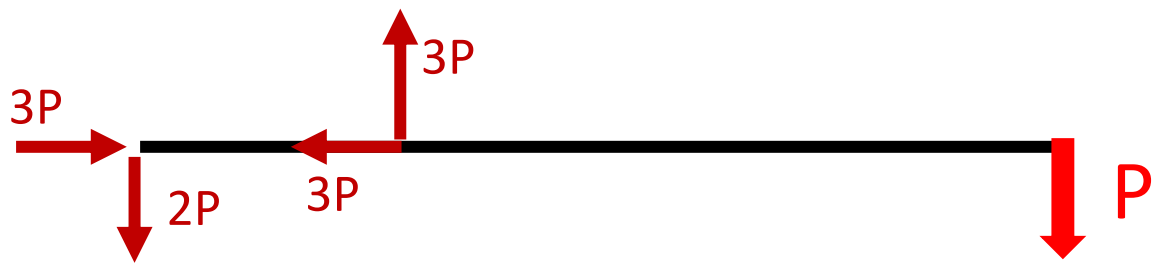
$h=50\text{ mm}$   
 $b=60\text{ mm}$   
 $\delta=10\text{ mm}$

$$\sum M_A = 0$$

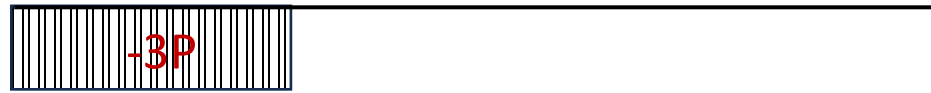
$$-P \cdot L + R^B \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{L}{3} = 0$$

$$R^B = 3\sqrt{2}P$$

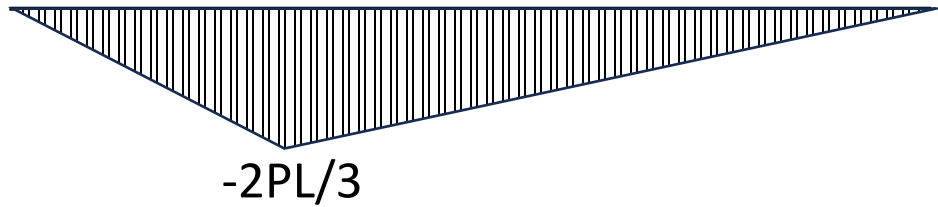




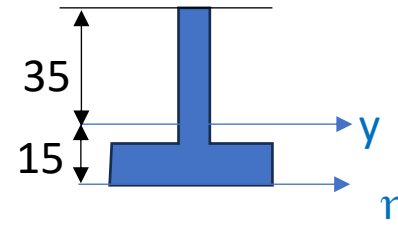
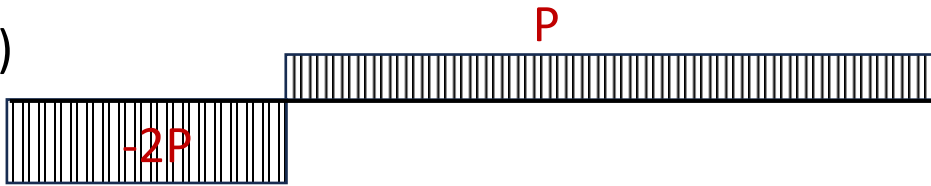
$N(x)$



$Mg(x)$



$T(x)$



$$\bar{z}_c = \frac{1}{A} \int_A \bar{z} dA$$

$$A = b \cdot \delta + (h - \delta) \cdot \delta = \underbrace{6 \cdot 1}_{A_1} + \underbrace{(5 - 1) \cdot 1}_{A_2} = 6 + 4$$

$$A = 10 \text{ cm}^2$$

$$\bar{z}_c = \frac{1}{A} \left( b \cdot \delta \cdot \frac{\delta}{2} + (h - \delta) \cdot \delta \cdot \frac{h + \delta}{2} \right)$$

$$\bar{z}_c = \frac{6 \cdot 0,5 + 4 \cdot 3}{10} = \frac{3 + 12}{10} = 1,5 \text{ cm}$$

$$J_y = \frac{6 \cdot 1^3}{12} + 6 \cdot 1^2 + \frac{1 \cdot 4^3}{12} + 4 \cdot 1,5^2$$

$$J_y = 0,5 + 6 + 5,3 + 9 = 20,8 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_N = -\frac{3P}{A}$$

$$|\sigma^{\text{G}}| = \left| \frac{2}{3} \frac{PL}{J_y} z_{\text{max}} - \frac{3P}{A} \right| \leq k_v$$

$$\text{G} \quad P \leq \frac{k_v}{\frac{2}{3} \frac{L z_{\text{max}}}{J_y} - \frac{3}{A}} = \frac{100 \cdot 10^6}{\frac{2}{3} \cdot \frac{1 \cdot 0.035}{20.83 \cdot 10^{-8}} - \frac{3}{10 \cdot 10^{-4}}}$$

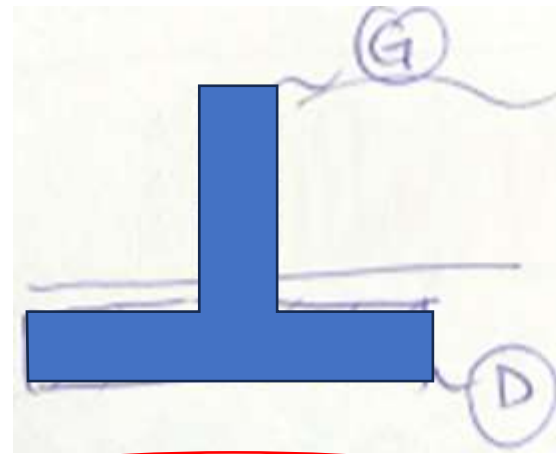
$$P \leq 917 \text{ N}$$

$$|\sigma^{\text{D}}| = \left| -\frac{2}{3} \frac{PL}{J_y} z_{\text{min}} - \frac{3P}{A} \right| \leq k_v$$

$$\text{D} \quad P \leq \frac{k_v}{\frac{2}{3} \frac{L z_{\text{min}}}{J_y} + \frac{3}{A}} = \frac{100 \cdot 10^6}{\frac{2}{3} \cdot \frac{1 \cdot 0.015}{20.83 \cdot 10^{-8}} + \frac{3}{10 \cdot 10^{-4}}}$$

$$P \leq 1960 \text{ N}$$

$$P_{\text{max}} = 917 \text{ N}$$

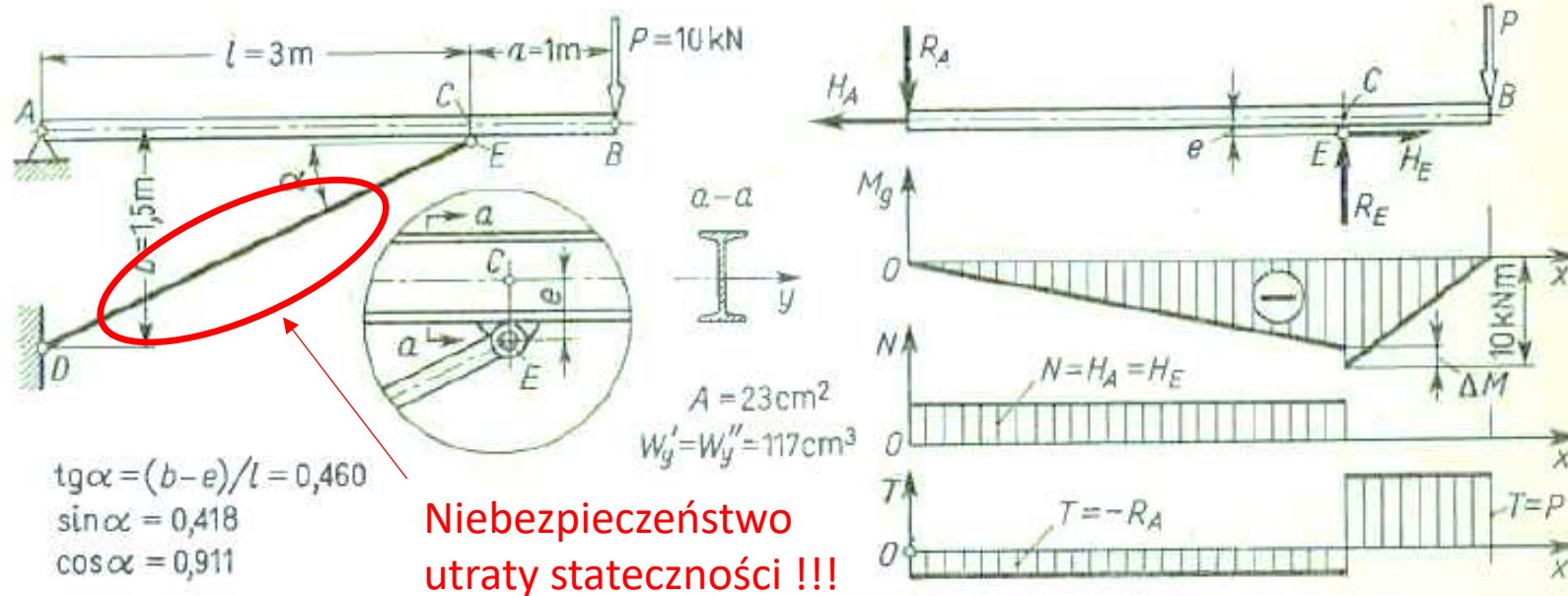


$$\sigma^{\text{G}}_{M_p} = -\frac{2}{3} \frac{PL}{J_y} \cdot z_{\text{max}}$$

$$\sigma^{\text{D}}_{M_p} = \frac{2}{3} \frac{PL}{J_y} \cdot z_{\text{min}}$$

## Zadanie 13.5 (z książki prof. Brzoski)

2. Nieważka dwuteowa belka  $ACB$  (rys. 6.12) podparta jest prętem  $DE$ , przy czym przegub  $E$  jest umocowany na belce mimośrodowo ( $e = 12$  cm). Wyznaczyć  $\sigma_e$  w niebezpiecznym przekroju belki.



Rys. 6.12. Przykład liczbowy

Rozwiązanie. Istotne w tym zadaniu jest zbadanie roli mimośrodu  $e$ . Z warunku równowagi momentów względem  $A$  mamy ściskającą siłę w pręcie  $DE$ :  $N' = P(l + a) / b \cos \alpha = 29,4$  kN. Na belkę w punkcie  $E$  działają składowe  $R_E = N' \sin \alpha = 12,3$  kN i  $H_E = N' \cos \alpha = 26,7$  kN. Wykres  $M_g$  ma w punkcie  $C$  przeskok  $\Delta M$ , albowiem dla przekroju tuż na prawo od punktu  $C$  jest  $M_g = Pa = 10$  kNm, natomiast w przekroju tuż na lewo od tego punktu jest  $M'_g = Pa - H_E e = 6,8$  kNm. Badając  $\sigma_e$  w pierwszym przypadku mamy  $\sigma_e = 10 \cdot 10^3 / 117 \cdot 10^{-6} = 85$  MPa, natomiast w przekroju drugim  $\sigma_e = (H_E / A) + [(Pa - H_E e) / W_y] \approx 70$  MPa. Niebezpieczny jest więc przekrój tuż z prawej strony  $C$ .